1 – Préambule

L'algèbre de Boole (du mathématicien britannique George Boole) est une partie des mathématiques qui s'intéresse à la logique. Elle propose des techniques permettant de mettre en relation des variables logiques à l'aide d'opérateurs logiques.

2 – Utilité

Les systèmes à base **d'électronique** et **d'informatique** ont des fonctionnements logiques qui impliquent l'utilisation de l'algèbre de Boole.

> Exemple :
> Un distributeur automatique de billets de banque ne distribuera la somme demandée que sous certaines conditions : le code secret doit être bon ET le compte à débiter doit être approvisionné en conséquence.
> La sortie « distribuer les billets » est bien binaire : il y a distribution ($D=1$) ou pas ($D=0$). Cela est du au fait que les entrées sont binaires : le code secret est bon ($c=1$) ou pas ($c=0$), le compte est approvisionné ($a=1$) ou pas ($a=0$). On remarquera la présence d'un opérateur « ET » entre les variables c et a ; en effet, le fonctionnement attendu du distributeur fait que pour avoir $D=1$, il faut avoir $c=1$ (le code est bon) *ET* $a=1$ (il y a de l'argent sur le compte) et non pas *OU*.

3 – Variable logique, binaire ou booléenne

Une variable logique est une grandeur qui peut prendre 2 états VRAI ou FAUX ou valeurs 0 ou 1. Une variable logique, dite aussi binaire ou booléenne, se note par une lettre, comme en algèbre : a, b, x, etc.

4 – Fonctions logiques fondamentales

Fonction logique OU (disjonction)

Définition : a OU b est VRAI si et seulement si a est VRAI OU b est VRAI.

La disjonction est inclusive, c'est-à-dire que a OU b est VRAI également si a est VRAI et b est VRAI.

Notation : $a+b$, $a \vee b$, $a \mid b$, $a \parallel b$, $a\ OR\ b$

La disjonction peut aussi être exclusive, c'est-à-dire que a OU b est VRAI que si a est VRAI ou b est VRAI.

Notation : $a \oplus b$, $a \overline{\vee} b$, $a\ XOR\ b$

Remarque : *La fonction XOR n'est pas fondamentale mais composée :* $a\ XOR\ b = (a+b)\cdot\left(\overline{a\cdot b}\right) = a\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot b$

Fonction logique ET (conjonction)

Définition : a ET b est VRAI si et seulement si a est VRAI ET b est VRAI.

Notation : $a\cdot b$, $a \wedge b$, $a\,\&\,b$, $a\,\&\&\,b$, $a\ AND\ b$

Fonction négation

Définition : la négation (ou « complément ») de a est VRAIE si et seulement si a est FAUX.

Notation : $\overline{a}$, $!a$, $\neg a$, $non\ a$, $non-a$

5 – Equation logique

Une équation logique exprime une variable dite « **de sortie** » en fonction d'autres variables dites « **d'entrée** ».

Si les variables d'entrée sont logiques, alors la variable de sortie est elle aussi logique et l'algèbre de Boole s'applique.

Dans l'exemple du §2, la distribution de billets D est la variable de sortie qui dépend de l'état des autres variables a et c qui sont les variables d'entrée ; comme elles sont logiques, D est elle aussi logique.

L'équation logique est construite sur la base du fonctionnement attendu (que veut-on ?). Voilà différents cas de fonctionnement possibles ; le premier est bien entendu le plus raisonnable !

La distribution est possible que si :

- ⇒ [cas 1] le code est bon ($c=1$) **ET** si le compte est abondé ($a=1$) : $D=a\cdot c$
- ⇒ [cas 2] le code est bon ($c=1$): $D=c$
- ⇒ [cas 3] le code est mauvais ($c=0$) : $D=\overline{c}$
- ⇒ [cas 4] le code est mauvais ($c=0$) **ET** le compte est abondé ($a=1$) : $D=a\cdot\overline{c}$

6 – Table de vérité

Trouver une équation logique peut s'avérer difficile car il faut envisager toutes les combinaisons possible et il y en a $N=2^n$ où n est le nombre de variables d'entrée. Pour chaque combinaison, il faut dire si la sortie vaut 0 ou 1 (ou X). On construit alors la table de vérité pour en extraire l'équation sous forme de sommes de produits.

ENTREES		SORTIE
a	c	D
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table de vérité du cas n°1

7 – Propriétés algébriques

- Associativité : $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c$
- Commutativité : $a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
- Distributivité : $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$
- Idempotence : $a+a+a+a+\ldots=a$ $a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots=a$
- Elément neutre : $a+0=a$ $a\cdot 1=a$
- Absorption : $a\cdot 0=0$ $a+1=1$
- Simplification : $a+\overline{a}\cdot b=a+b$ $a+a\cdot b=a$ $a\cdot(\overline{a}+b)=a\cdot b$
- Complémentarité : $\overline{\overline{a}}=a$ $a+\overline{a}=1$ $a\cdot\overline{a}=0$
- Théorèmes de De Morgan : $\overline{a\cdot b}=\overline{a}+\overline{b}$ $\overline{a+b}=\overline{a}\cdot\overline{b}$